Dr. Emanuel Scheidegger
Dr. Christoph Kawan

Topologie
SS 10
Institut für Mathematik
Universität Augsburg

Übungsblatt 5

Differentialformen auf Mannigfaltigkeiten

17. Die Pullback–Abbildung für Differentialformen.
    Es sei $f : M \to N$ eine glatte Abbildung zwischen Mannigfaltigkeiten und $f^* : \Omega^*(N) \to \Omega^*(M)$ die Pullback–Abbildung. Zeigen Sie, daß gilt:

    (a) (1 Punkt) f^* ist linear und $f^*(\omega \wedge \eta) = f^*\omega \wedge f^*\eta$ für $\omega, \eta \in \Omega^*(N)$.

    (b) (1 Punkt) $\mathrm{d}(f^*\omega) = f^*\mathrm{d}\omega$.

    (c) (1 Punkt) Sei P eine Mannigfaltigkeit und $g : N \to P$ eine glatte Abbildung. Dann gilt für $\omega \in \Omega^*(P)$: $f^*(g^*\omega) = (g \circ f)^*\omega$.

    (d) (1 Punkt) Es sei $\mathrm{id}_M : M \to M$ die Identitätsabbildung. Dann gilt für $\omega \in \Omega^*(M)$: $\mathrm{id}_M^*\omega = \omega$.

18. Existenz von Differentialformen.

    (a) (2 Punkte) Es sei M eine glatte Mannigfaltigkeit, $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ eine offene Überdeckung von M, und für jedes $\alpha \in A$, $\omega_\alpha \in \Omega^k(U_\alpha)$, so dass $\omega_\alpha|_{U_\alpha \cap U_\beta} = \omega_\beta|_{U_\alpha \cap U_\beta}$ für alle $\alpha, \beta \in A$. Zeigen Sie, daß es ein eindeutiges $\omega \in \Omega^k(M)$ gibt, so daß für jedes $\alpha \in A$ gilt: $\omega|_{U_\alpha} = \omega_\alpha$.

    (b) (2 Punkte) Es sei (U_+, U_-) die offene Überdeckung von S^2 aus Aufgabe 9, und $\phi_+(p) = (x, y)$ lokale Koordinaten in $p \in U_+$. Es sei $\omega \in \Omega^1(U_+)$ gegeben durch $\omega(x, y) = \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2+y^2}$. Zeigen Sie, daß $\psi_{-+}^*\omega$ nicht wohldefiniert ist, und somit $\omega \notin \Omega^1(S^2)$.

19. Relative Kohomologie.
    Es sei M eine glatte Mannigfaltigkeit, $N \subset M$ eine abgeschlossene Untermannigfaltigkeit mit der Inklusion i. ($N = \emptyset$ ist zugelassen.) Wir definieren den Vektorraum der relative Differentialformen $\Omega^q(M, N) = \ker\left(\Omega^q(M) \xrightarrow{i^*} \Omega^q(N)\right)$. $\omega \in \Omega^q(M, N)$ ist eine Differentialform vom Grad q auf M, die auf N verschwindet.

(a) (1 Punkt) Zeigen Sie, daß $\Omega^\bullet(M,N)$ ein Unterkomplex von $\Omega^\bullet(M)$ ist.

(b) (2 Punkte) Zeigen Sie, daß die Folge

$$0 \to \Omega^q(M,N) \to \Omega^q(M) \xrightarrow{i^*} \Omega^q(N) \to 0$$

exakt ist. Wählen Sie zuerst $M = \mathbb{R}^m$ und $N = \mathbb{R}^n$ und verallgemeinern Sie dann auf beliebige M und N.

(c) (1 Punkt) Zeigen Sie, daß gilt:

$$\mathrm{H}^q(M,N) \cong \ker\left(\mathrm{H}^q(M) \xrightarrow{i^*} \mathrm{H}^q(N)\right) \oplus \operatorname{coker}\left(\mathrm{H}^{q-1}(M) \xrightarrow{i^*} \mathrm{H}^{q-1}(N)\right).$$

(Ist $f : V \to W$ eine lineare Abbildung von Vektorräumen über einem Körper, so ist der Kokern von f der Quotient von W nach dem Bild von f.)

20. Kohomologie einer differenzierbaren Singularität.
Es sei $f \in \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$ ein Polynom $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit einem isolierten kritischen Punkt im Ursprung, d.h. $\mathrm{d}f = 0$ genau dann, wenn $x_i = 0$ für alle i. Wir definieren das Differential $\delta : \Omega^q(\mathbb{R}^n) \to \Omega^{q+1}(\mathbb{R}^n) : \omega \mapsto \delta\omega = \omega \wedge \mathrm{d}f$.

(a) (2 Punkte) Zeigen Sie, daß $C = (\Omega^\bullet(\mathbb{R}^n), \delta)$ eine kommutative gradierte Differentialalgebra über $\mathbb{R}$ ist.

(b) (2 Punkte) Zeigen Sie, daß gilt:

$$\mathrm{H}^q(C) = \begin{cases} 0 & q \neq n, \\ \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]/J & q = n. \end{cases}$$

wobei $J = \langle \partial_1 f, \ldots, \partial_n f \rangle$ das Jacobi–Ideal erzeugt durch die partiellen Ableitungen von f ist.

Abgabetermin: Freitag, 28. 5. 2010 um 10:00 Uhr.